

Seminário de Investigação Operacional

Manuel Ramalhete

*Prof. Auxiliar do ISEG – Departamento de Matemática
Director de Planeamento Estratégico da Galp Energia
Vice Presidente da Associação Portuguesa de Energia*

Novembro 2009

Cemapre - Seminário De Investigação Operacional

A PROGRAMAÇÃO LINEAR NO APOIO ÀS DECISÕES OPERACIONAIS NA REFINAÇÃO DE PETRÓLEOS

Pontos chave – Multiplicidade de escolhas: crudes diversos, tecnologias variadas, muitos produtos, misturas, etc.

A programação das actividades de refinação de petróleos envolve uma multiplicidade de escolhas – diversos tipos de petróleo bruto e de outras matérias primas, intensidade de utilização das diversas unidades fabris, tipos de produtos produzir, operações de mistura, etc. - que, dada a dimensão e complexidade que atingem, dificilmente podem ser feitas de forma racional sem o recurso a modelos matemáticos de optimização. Hoje em dia, a programação matemática, em geral, e a programação linear, em particular, fazem parte dos instrumentos indispensáveis utilizados no apoio à tomada de decisões nesta indústria.

Pontos chave – Multiplicidade de unidades produtivas, diferentes refinarias, produção conjunta, parques comerciais, transferências internas, etc.

Por outro lado, muitas empresas petrolíferas operam com várias unidades produtivas (refinarias) que transferem entre si matérias primas, produtos finais e produtos intermédios, designados na industria por componentes, o que para além de aumentar a dimensão da actividade de planeamento conjunto levanta problemas adicionais de valorização das transferências internas, isto é fixação dos respectivos preços de transferência, situação tanto mais complexa quando não existe mercado concorrencial para alguns produtos e o apuramento objectivo do respectivo custo de produção se torna técnica e rigorosamente impossível no sentido contabilístico, por se estar em muitos casos perante produção conjunta.

Cemapre - Seminário De Investigação Operacional

A PROGRAMAÇÃO LINEAR NO APOIO ÀS DECISÕES OPERACIONAIS NA REFINAÇÃO DE PETRÓLEOS

Pontos chave – Dualidade e preços sombra/preços de transferência, otimização individual e otimização conjunta, performance das unidades e sistema de incentivos, etc.

Nestes casos, os preços sombra, conhecidos da teoria da dualidade, obtidos com a resolução do modelo utilizado, são preciosos auxiliares no processo de decisão e são uma alternativa para este efeito, sendo objectivamente determinados, embora nem sempre aceites pacificamente na prática. Por outro lado, eles asseguram que a “otimização individual” é compatível com a “otimização conjunta” de todo o sistema, isto é, para cada unidade, o plano óptimo obtido individualmente coincide com o mesmo obtido globalmente desde que os preços de transferência sejam os preços sombra respectivos do programa dual.

Pontos chave – Desafio para a utilização de métodos racionais de cálculo económico, decisões táticas e decisões estratégicas.

Nesta apresentação, propositadamente simples na dimensão, por razões pedagógicas, mas contendo no essencial as características dos sistemas reais de maior dimensão, analisaremos a otimização individual de uma refinaria e discutiremos a utilidade das soluções primal e dual no processo de gestão da refinaria. Com esta discussão pretendemos “aliciar” os estudantes para a importância deste instrumento de apoio às decisões operacionais numa unidade produtiva, reservando a parte final para alguns comentários sobre a sua utilidade também no plano estratégico, nomeadamente no apoio a decisões de investimento.

Modelo de Programação da Refinaria “Q” (c/Reforming)

- Uma refinaria transforma petróleo bruto em gasolina, petróleo/jet, gásóleo de aquecimento e fuelóleo. São utilizados dois tipos de petróleo bruto, A e B, cada um dos quais pode ser fraccionado, pela unidade de destilação de petróleo bruto, em nafta, petróleo/jet, destilado de fundo e resíduo. A nafta pode ser combinada directamente em gasolina, ou pode ser transformada através de uma unidade de reformação de nafta e a nafta obtida combinada em gasolina. A unidade de reformação produz também um resíduo que é combinado em fuelóleo. Um terceiro componente de gasolina, que pode ser utilizado, é a nafta de cracking, obtida de outra refinaria. O fraccionamento do petróleo/jet é submetido a uma lavagem caustica mas sem perda de rendimento. O gásóleo de aquecimento é composto por uma mistura fixa de 75% de destilado fundo e 25% de gásóleo de cracking obtido de outra refinaria. O destilado de fundo e o gásóleo de cracking podem também ser combinados em fuelóleo juntamente com os resíduos de petróleo bruto e os resíduos da reformação.
- Os dados técnico-económicos constam do quadro a seguir.
- **Disponibilidade de “inputs”**
Pelo menos 120.000 toneladas de cada petróleo bruto devem ser utilizadas dentro do período de 30 dias; por razões comerciais não há limite máximo de utilização. A nafta de cracking e o gásóleo de cracking podem ser adquiridos em quaisquer quantidades conforme necessário.

Utilizando as variáveis indicadas no diagrama, vamos estabelecer o modelo de programação linear da refinaria.

CEMAPRE - Seminário De Investigação Operacional

Rendimento em Petróleo Bruto (% peso)	Petróleo Bruto A	Petróleo Bruto B
Nafta	13	19
Petróleo	15	12
Destilado de fundo	37	30
Resíduo	35	39
	<u>100</u>	<u>100</u>

Rendimentos de Reforming para alimentação em Nafta (% peso)

Nafta reformada	65
Resíduo de reformação	35
	<u>100</u>

Capacidades máximas (tons/dia de alimentação)	Petróleo Bruto A	Petróleo Bruto B
Unidade de Destilação de Petróleo Bruto	11.500	10.000
Reforming	<u>1.600</u>	

Mistura de Gasolina	Nº Octanas (sem chumbo)	Pressão de vapor (psig)
Nafta	66	13
Nafta Reformada	97	12
Nafta de Cracking	89	7

Especificações da Gasolina	94 min	9 min e 12 max
-----------------------------------	--------	----------------

Mistura de fuel Óleo	Nº Misturas de FO
Resíduo A	45.4
Resíduo B	43.0
Destilado de fundo	16.2
Gasóleo de cracking	19.8
Resíduo de reformação	23.1

Especificações do Fuel Óleo	35.0 máx
------------------------------------	----------

Nota : O número de octanas da gasolina, a pressão de vapor e o número da mistura de fuelóleo são combinações lineares das especificações das componentes misturadas.

CEMAPRE - Seminário De Investigação Operacional

Custos de aquisição	um/ton
Petróleo Bruto A	8.0
Petróleo Bruto B	8.5
Nafta de Cracking	11.2
Gasóleo de Cracking	10.1

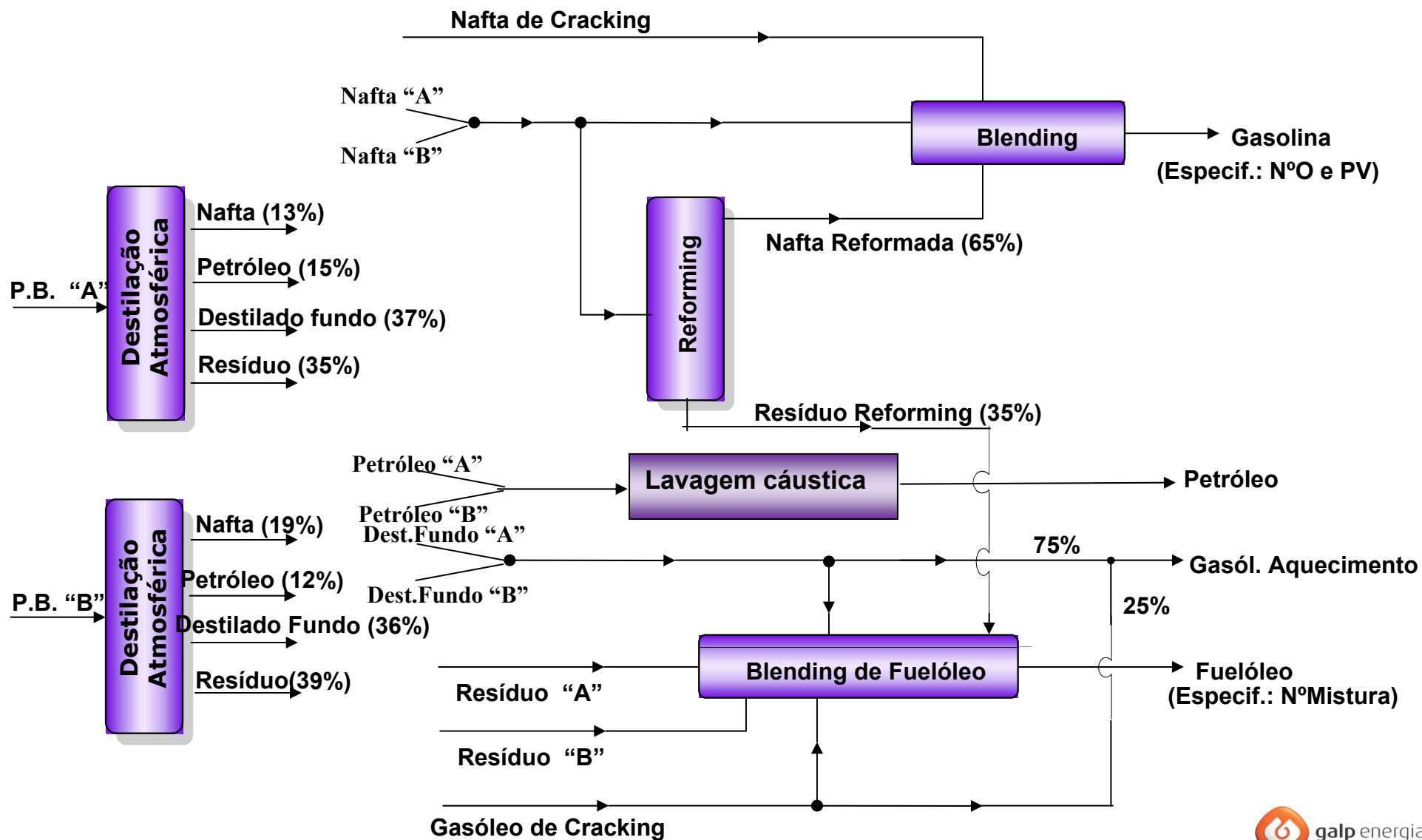
Preços dos produtos	um/ton
Gasolina	19.6
Petróleo	14.0
Gasóleo de aquecimento	14.5
Fuelóleo	6.5

custos marginais de operação	Alimentação UM/TON	
Unidade de destilação de petróleo bruto - P.B.A.	0.4	
Unidade de destilação de petróleo bruto - P.B.B.	0.5	
Reformado	4.0	
Petróleo com lavagem caustica	0.2	

Limites de produção para um período de 30 dias (toneladas)	Máximo	Minimo
Gasolina	60.000	48.000
Petróleo	45.000	36.000
Gasóleo de aquecimento	120.000	105.000
Fuelóleo	não há limite	120.000

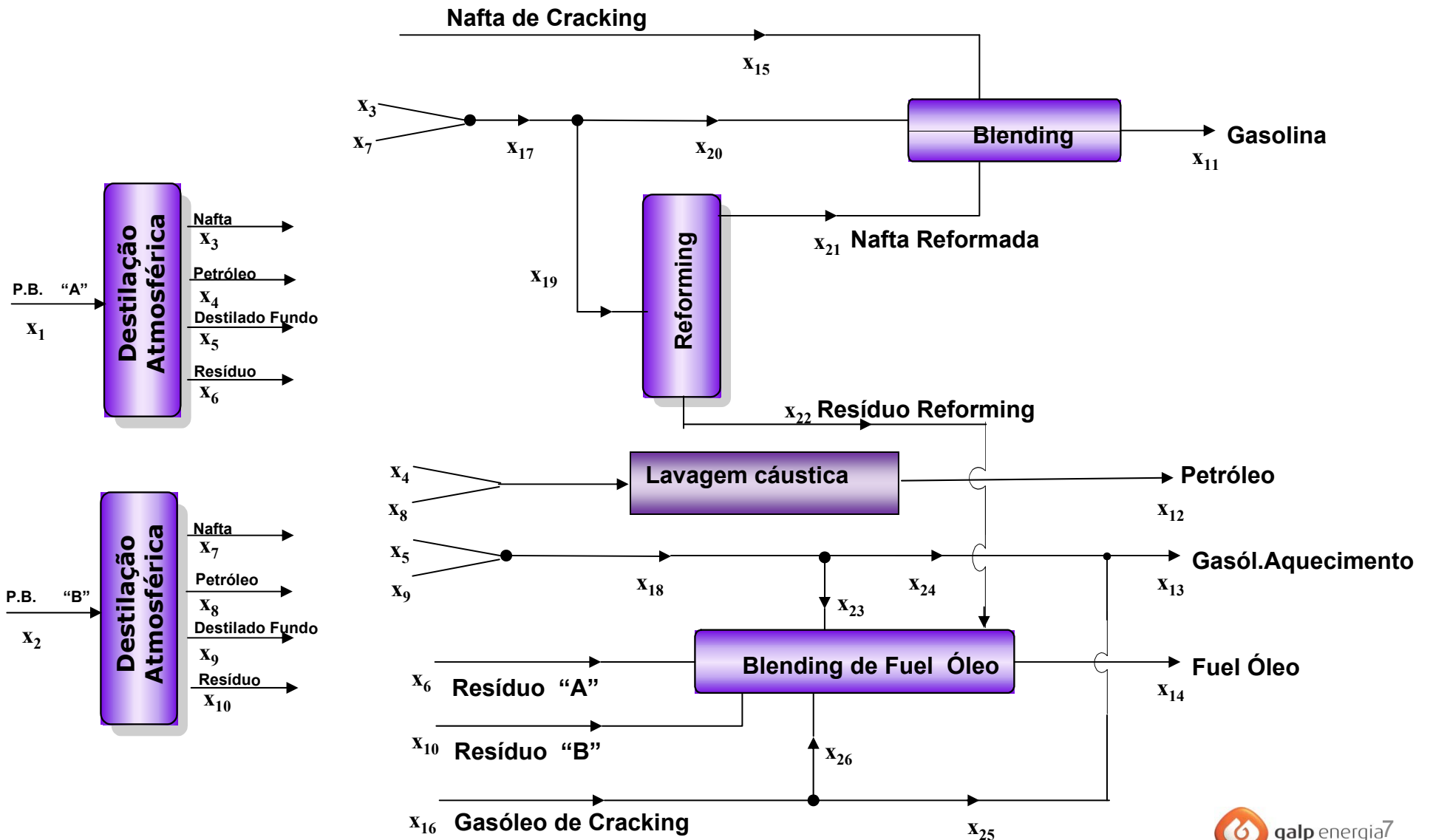
CEMAPRE - Seminário De Investigação Operacional

Diagrama da Refinaria "Q"- Rendimentos



CEMAPRE - Seminário De Investigação Operacional

Diagrama da Refinaria "Q" - Variáveis



CEMAPRE - Seminário De Investigação Operacional

■ Modelo de Programação Linear da Refinaria “Q”

Sendo x_j = tons/dia do produto j , e todas as variáveis não negativas, vem:

Restrições de disponibilidade

$$\begin{array}{ll} \text{Petróleo Bruto A} & x_1 \geq 4.000 \\ \text{Petróleo Bruto B} & x_2 \geq 4.000 \end{array}$$

Restrições de capacidade

$$\begin{array}{ll} \text{Destilação Atmosférica} & \frac{x_1}{11.500} + \frac{x_2}{10.000} \leq 1 \\ & 0.1x_1 + 0.115x_2 \leq 1150 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Unidade de Reforming} & x_{19} \leq 1.600 \end{array}$$

Restrições de Balanço Material

Correntes fixas

$$\begin{array}{ll} \text{Petróleo Bruto A:} & -0.13x_1 + x_3 = 0 \\ & -0.15x_1 + x_4 = 0 \\ & -0.37x_1 + x_5 = 0 \\ & -0.35x_1 + x_6 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Petróleo Bruto B:} & -0.19x_2 + x_7 = 0 \\ & -0.12x_2 + x_8 = 0 \\ & -0.30x_2 + x_9 = 0 \\ & -0.39x_2 + x_{10} = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Reforming:} & -0.65x_{19} + x_{21} = 0 \\ & -0.35x_{19} + x_{22} = 0 \end{array}$$

CEMAPRE - Seminário De Investigação Operacional

■ Modelo de Programação Linear da Refinaria “Q” (cont.)

Ligações livres

Nafta	$-x_3 - x_7 + x_{17} = 0$
Petróleo	$-x_4 - x_8 + x_{12} = 0$
Input destilado de fundo	$-x_5 - x_9 + x_{18} = 0$
Output nafta	$-x_{17} + x_{19} + x_{20} = 0$
Gasolina	$x_{11} - x_{15} - x_{20} - x_{21} = 0$
Output destilado fundo	$-x_{18} + x_{23} + x_{24} = 0$
Gasóleo de cracking	$-x_{16} + x_{25} + x_{26} = 0$
Fuelóleo	$-x_6 - x_{10} + x_{14} - x_{22} - x_{23} - x_{26} = 0$

Restrições de mercado

Gasolina	$x_{11} \leq$	2000
	$x_{11} \geq$	1600
Petróleo	$x_{12} \leq$	1500
	$x_{12} \geq$	1200
Gasóleo Aquecimento	$x_{13} \leq$	4000
	$x_{13} \geq$	3500
Fuelóleo	$x_{14} \geq$	4000

CEMAPRE - Seminário De Investigação Operacional

■ Modelo de Programação Linear da Refinaria “Q” (cont.)

Misturas sujeitas a especificações

Gasolina

Valor mínimo de octanas:

$$\begin{aligned} 89x_{15} + 66x_{20} + 97x_{21} &\geq 94(x_{15} + x_{20} + x_{21}) \\ \therefore 5x_{15} + 28x_{20} - 3x_{21} &\leq 0 \end{aligned}$$

Pressão de vapor mínima:

$$\begin{aligned} 7x_{15} + 13x_{20} + 12x_{21} &\geq 9(x_{15} + x_{20} + x_{21}) \\ \therefore 2x_{15} + 4x_{20} - 3x_{21} &\leq 0 \end{aligned}$$

Pressão de vapor máxima:

$$\begin{aligned} 7x_{15} + 13x_{20} + 12x_{21} &\leq 12(x_{15} + x_{20} + x_{21}) \\ \therefore -5x_{15} + x_{20} &\leq 0 \end{aligned}$$

Fuelóleo

Número máximo de misturas

$$\begin{aligned} 45.4x_6 + 43.0x_{10} + 23.1x_{22} + &\leq 35(x_6 + x_{10} + x_{22} + x_{23} + \\ + 16.2x_{23} + 19.8x_{26} &+ x_{26}) \\ \therefore 10.4x_6 + 8.0x_{10} - 11.9x_{22} - 18.8x_{23} - 15.2x_{26} &\leq 0 \end{aligned}$$

CEMAPRE - Seminário De Investigação Operacional

■ Modelo de Programação Linear da Refinaria “Q” (cont.)

Função objectivo

$$-8.0x_1 - 8.5x_2 - 11.2x_{15} - 10.1x_{16} - 0.4x_{19}$$

(P.B.A.) (P.B.B.) (N.C.) (G.C.) (op A)

$$-0.5x_2 - 4.0x_{19} - 0.2x_{12} + 19.6x_{11} + 14x_{12} + 14.5x_{13} + 6.5x_{14} = \textit{máximo}$$

(op B.) (op ref.) (op Pet.) (Gasolina.) (Pet.) (G.C.) (Fuel.)

i.e. $-8.4x_1 - 9.0x_2 + 19.6x_{11} + 13.8x_{12} + 14.5x_{13} + 6.5x_{14} - 11.2x_{15} - 10.1x_{16} - 4.0x_{19} = \textit{máximo}$

Apresentam-se nas páginas seguintes:

- a matriz dos coeficientes das restrições do problema
- a solução do problema obtida através do solver

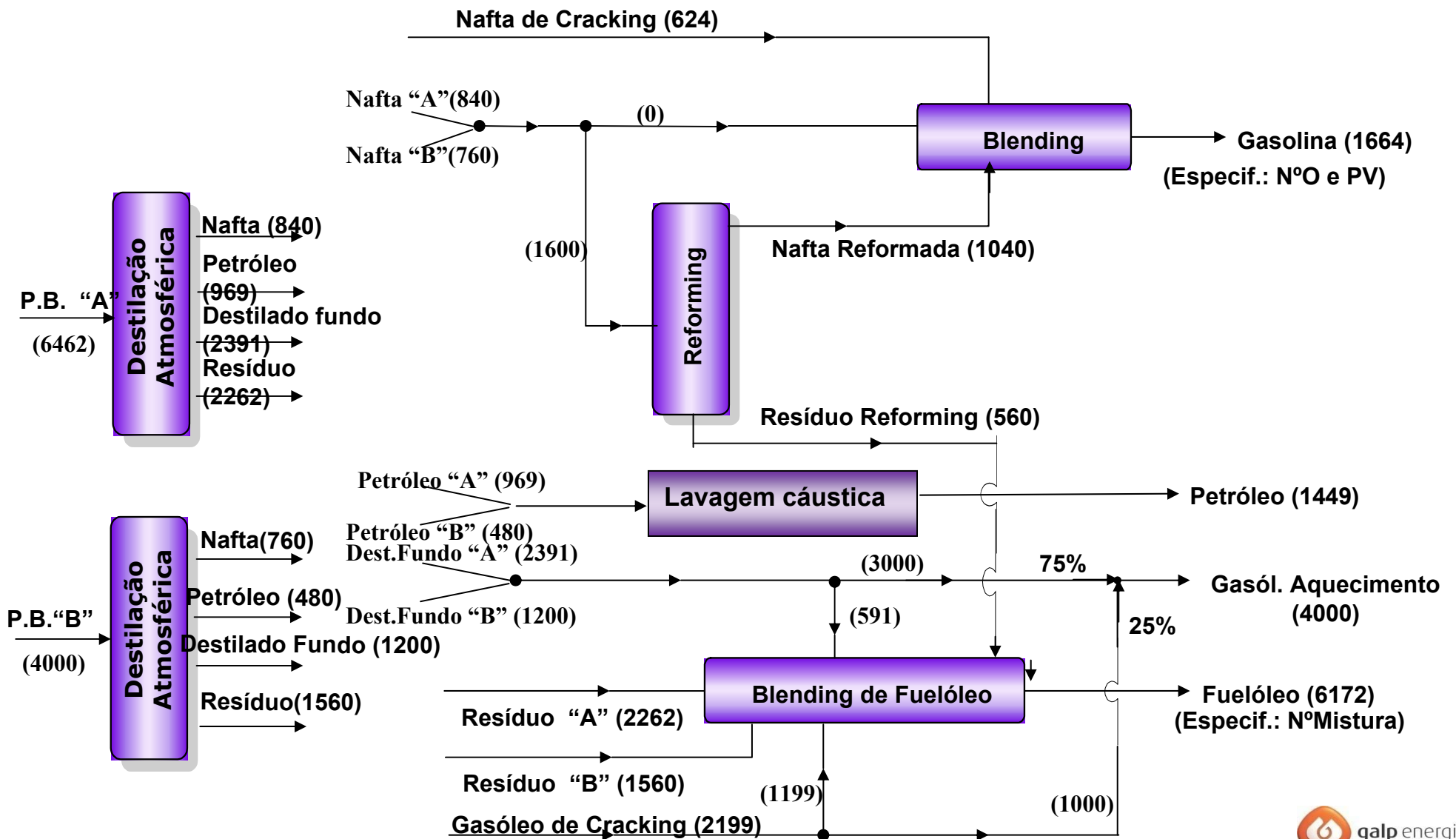
CEMAPRE - Seminário De Investigação Operacional

Matriz da Refinaria "Q"

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	X11	X12	X13	X14	X15	X16	X17	X18	X19	X20	X21	X22	X23	X24	X25	X26				
1	1																										≥	4 000		
2		1																										≥	4 000	
3	0,10	0,115																										≤	1 150	
4																			1									≤	1 600	
5	-0,13		1																									=	0	
6	-0,15			1																								=	0	
7	-0,37				1																							=	0	
8	-0,35					1																						=	0	
9		-0,19					1																					=	0	
10		-0,12						1																				=	0	
11		-0,30							1																			=	0	
12		-0,39								1																		=	0	
13																			-0,65		1							=	0	
14																			-0,35			1						=	0	
15			-1				-1										1											=	0	
16				-1				-1				1																=	0	
17					-1				-1									1										=	0	
18																	-1		1	1								=	0	
19										1					-1					-1	-1							=	0	
20																		-1						1	1			=	0	
21																-1									1	1		=	0	
22						-1				-1				1									-1	-1			-1	=	0	
23													0,75															=	0	
24													0,25															=	0	
25											1																	≤	2 000	
26											1																	≥	1 600	
27												1																≤	1 500	
28												1																≥	1 200	
29													1															≤	4 000	
30													1															≥	3 500	
31														1														≥	4 000	
32															5					28	-3							≤	0	
33															2					-4	-3							≤	0	
34															-5					1	0							≤	0	
35						10,4				8																		≤	0	
	-1,00	-1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	1,00	1,00	1,00	-1,00	-1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00			
	-8,4	-9,5									19,6	13,8	14,5	6,5	-11,2	-10,1				-4										

CEMAPRE - Seminário De Investigação Operacional

Diagrama da Refinaria "Q"- Solução PL



CEMAPRE - Seminário De Investigação Operacional

Programação linear – Interpretação da solução da Refinaria Q

- A solução óptima é reproduzida no *Answer Report* e no *Sensitivity Report*.

Dos valores das variáveis pode notar-se o seguinte:

- É processado o mínimo de petróleo Bruto B, ficando a capacidade produtiva não completamente utilizada. O reformado satura a capacidade da respectiva unidade.
- A produção de gasolina situa-se a um nível intermédio, isto é, nem no máximo nem no mínimo. Esta é obtida de nafta reformada e de gasolina de cracking, não sendo utilizada nafta de destilação directa. A especificação de octanas é respeitada com uma pressão de vapor intermédia. Toda a nafta de destilação directa é reformada.
- A produção de petróleo situa-se também a um nível intermédio.
- A produção de gasóleo de aquecimento situa-se ao seu nível máximo.
- A produção de fuelóleo aquém do máximo permitido. Este é obtido de todas as componentes disponíveis e está de acordo com a especificação.
- O plano de produção sintético é apresentado na tabela “Refinaria Q-Plano simplificado”.

CEMAPRE - Seminário De Investigação Operacional

Programação linear – Interpretação da solução da Refinaria Q (cont.)

- Quanto aos preços sombra pode notar-se o seguinte:
 - Verifica-se uma grande perda de oportunidade (34.09 um/ton) na utilização de nafta de destilação directa na produção de gasolina, não sendo por isso utilizada.
 - O custo marginal (desincentivo) da utilização de um mínimo de 4000 tons/dia de petróleo bruto B é 0,998 ($\approx 1,00$) um/ton:

• Valor Marginal Pet. Bruto B					= 8,00
• C.M.Nafta*rendimento	=	6,65*0,19	=	1,2635	
• C.M.Petróleo*rendimento	=	13,80*0,12	=	1,656	
• C.M.D.Fundo*rendimento	=	10,95*0,30	=	3,285	
• C.M.Resíduo*rendimento	=	4,61*0,39	=	1,7979	
• Preço Petróleo Bruto B + C. Operação (8,5 + 0,5)					= 9,00

CEMAPRE - Seminário De Investigação Operacional

Programação linear – Interpretação da solução da Refinaria Q (cont.)

- Quanto aos preços sombra pode notar-se o seguinte:
 - O incentivo marginal para expandir a capacidade de reformação é de 8.63 um/ton de alimentação:

• Incentivo	=	8,63
• Valor Nafta Refor*rend.	= $24,64 \cdot 0,65$	= 16,016
• Valor Resid. Refor*rend.	= $9,32 \cdot 0,35$	= 3,262
• Valor Marginal produção	=	19,278
• C. Marginal Nafta (m.p.)	=	6,65
• C. Var. Operacionais	=	4,00
• Lucro marginal	=	8,63
 - Os custos marginais da gasolina, petróleo e fuelóleo são iguais aos seus respectivos preços de venda. Por exemplo para a Gasolina:

CEMAPRE - Seminário De Investigação Operacional

Programação linear – Interpretação da solução da Refinaria Q (cont.)

■ Quanto aos preços sombra pode notar-se o seguinte:

• Preço Venda Gasolina = **19,60**

• C. Marginal = **19,60**

➤ C.M Nafta Ref*Quant. = $24,64 \cdot 1040 = 25625,6$

➤ C.M.Nafta Crack*Qant. = $11,2 \cdot 6204 = 6988,8$

➤ C.M.Gasolina = $(25625,6 + 6988,8) / (1040 + 624) = \mathbf{19,60}$

■ O custo marginal do gásóleo de aquecimento é $(0.75 \cdot 10.95) + (0.25 \cdot 10.1) = 10.74$ um/ton. O lucro marginal do gásóleo de aquecimento é de 3.76 um/ton:

• Preço Venda Gas.Aquecimento = **14,5**

• Custo marginal = **10,74**

➤ C.M.D.Fundo*%mistura = $10,95 \cdot 0,75 = 8,2125$

➤ C. Gas.Crack*%mistura = $10,10 \cdot 0,25 = 2,525$

• Lucro Marginal = $14,5 - (8,2125 + 2,525 = 10,74) = \mathbf{3,76}$

CEMAPRE - Seminário De Investigação Operacional

Refinaria Q - Plano Simplificado			
	Quantidade ton/dia	Valor unitário U.m./ton	Valor Total
Matérias Primas			
Petróleo Bruto A	6.462	8,0	51.696
Petróleo Bruto B	4.000	8,5	34.000
Nafta cracking	624	11,2	6989
Gasóleo cracking	2.199	10,1	22.210
			<u>114.895</u>
Custos Variáveis Operacionais			
Petróleo Bruto A	6.462	0,4	2.585
Petróleo Bruto B	4.000	0,5	2.000
Nafta p/reforming	1.600	4,0	6.400
Petróleo	1.449	0,2	290
Total			<u>11.275</u>
Custos M.P. + Variáveis Operac.			<u>126.170</u>
Produtos finais			
Gasolina super	1.664	19,6	32.614
Petróleo	1.449	14	20.286
Gasóleo de aquecimento	4.000	14,5	58.000
Fuelóleo	6.172	6,5	40.118
Total			<u>151.018</u>
Margem C.V. Diária			<u>24.848</u> aprox. 24.851

CEMAPRE - Seminário De Investigação Operacional

Programação linear – análise de sensibilidade da Refinaria Q

■ Notas sobre a Função Objectivo

A partir do *Sensitivity Report – Adjusted Cells*, verifica-se o seguinte:

- Enquanto o preço do Crude A se mantiver entre 3,57 (8,0-4,43) e 8,68 (8,0+0,68) u.m., deve utilizar este plano de produção;
- Para o Crude B, desde que o respectivo preço não seja inferior a 7 u.m., este plano é o plano óptimo;
- O preço da Gasolina pode ser reduzido até 12,19 u.m./ton, mantendo-se inalterado o plano óptimo de produção;
- Por exemplo, para manter este plano como plano óptimo, então o preço do Petróleo/Kerosene deve situar-se entre 6,32 (13,8-7,48) e 43,35 (13,8+29,56) u.m./ton;
- O intervalo de sensibilidade para o preço do Fuelóleo é (4,31,10,1) u.m.;
- Etc.

CEMAPRE - Seminário De Investigação Operacional

Programação linear – análise de sensibilidade da Refinaria Q (cont.)

■ Notas sobre os lados Direitos

A partir do *Sensitivity Report – constraint*, verifica-se o seguinte:

- Se a capacidade do reforming tiver uma redução superior a 62 ton/dia ou um acréscimo superior a 44 ton/dia, então o respectivo preço sombra alterar-se-á, aumentando no primeiro caso e diminuindo no segundo (prova-se que neste caso – problema de maximização e restrição de menor ou igual – quando o lado direito aumento o preço sombra decresce, por patamares, isto é, em escada); no intervalo de sensibilidade (1600-62;1600+44) o preço sombra mantém-se. Esta abordagem é importante para analisar possíveis aumentos de capacidade (investimentos);
- Se aumentar-mos o lado direito referente à especificação do Fuelóleo (relacionada com o nº máximo de mistura), digamos, 1000, então o impacto na margem será de $240=1000*0,24$, uma vez que 1000 é inferior ao “acrécimo de sensibilidade”. Note-se que uma variação de 1000 no lado direito não significa aumentar em 1000 o nº de mistura, mas sim “*nº de mistura vezes tons de fuelóleo*”;

CEMAPRE - Seminário De Investigação Operacional

Programação linear – análise de sensibilidade da Refinaria Q (cont.)

■ Notas sobre os lados Direitos

A partir do *Sensitivity Report – constraint*, verifica-se o seguinte:

- Por exemplo, para o Índice de Octano (I.O.) da gasolina, note-se que o sinal da respectiva restrição de especificação está trocado, pelo que o “decréscimo de sensibilidade” significa ser mais agressivo – maior Índice de Octano ou N° de Octano (N.O.) - em termos de especificação. Por exemplo, se impomos um acréscimo de 100 no lado direito, (um decréscimo de 100 no **I.O. vezes tons – I.O.*tons** - de gasolina), então a margem melhora $168 = 100 * 1,68 = 25\,019 - 24\,851$. Neste caso, como o sinal da restrição está trocado, e depois de fazer o ajustamento no sinal, podemos aumentar em 320 o “**índice octano vezes tons de gasolina**” (*allowable decrease no Sensitivity Report*) e diminuí-lo em 1 680 (*allowable increase no Sensitivity Report*) sem que o respectivo preço sombra (*valor marginal do IO*tons*) se altere.

CEMAPRE - Seminário De Investigação Operacional

REFINARIA [Q](#)